metodologia

Metodologia para teste de aderência das hipóteses biométricas

A MIBA Rita Anzolin, em conjunto com seus ex-alunos e ex-funcionários, hoje mestrandos na UCONN - USA, disponibilizou, para aprimoramento e críticas de demais colegas, a metodologia para realizar testes de aderência de hipóteses biométricas que, segundo relata, julga ser o mais adequado em relação aos testes estatísticos tradicionais utilizados pela maioria dos atuários.

Objetivo do teste de aderência

"1. As hipóteses biométricas, demográficas, econômicas e financeiras devem estar adequadas às características da massa de participantes e assistidos e ao regulamento do plano de benefícios de caráter previdenciário."

(Anexo da Resolução CGPC Nº 18, de 28 de março de 2006 – grifo nosso).

Hipóteses biométricas

Por se tratar de hipótese, as estimativas das tábuas biométricas utilizadas para dimensionar as obrigações de um Plano de Previdência em Entidade Fechada de Previdência Complementar, podem se verificar ou não ao longo do tempo, podendo assim causar insuficiência de recursos ou superávit quando a sobrevida for subestimada.

Portanto, é de extrema importância o monitoramento destas hipóteses e a utilização de teste estatístico que indique a tábua biométrica mais ajustada a uma determinada massa de participantes de ativos e assistidos do Plano.

Após alguns anos de experiência aplicando determinados testes estatísticos, tais como qui-quadrado, erro quadrático etc., na prática observamos que estes não demonstravam ser apropriados para este tipo de análise.

Assim, estudando outras formas de medir o grau de confiabilidade dos testes, concluímos que uma forma adequada para testar a aderência seria aplicar os fundamentos básicos do teste de distribuição normal(z) por idade.

Desenvolvemos a metodologia descrita a seguir com o objetivo de verificar se as probabilidades de falecimento e invalidez das tábuas comumente utilizadas no mercado – normalmente resultado de experiência norte-americana – são adequadas à massa de participantes de um determinado Plano de Benefícios.

É importante destacar que este tipo de teste de aderência é realizado com eventos "passados" e assim o monitoramento da evolução deve ser considerado para eventual adequação de incremento geracional.

1. Metodologia

Para realização do teste de aderência das tábuas são utilizados:

1.1 Comparativo das ocorrências com as estimativas;

1.2. Desvio Padrão;

1.3. Teste Normal Padrão (Teste Z).

1.1 Comparativo das ocorrências com as estimativas:

Com base no percentual de ocorrências e de estimativas pode-se visualizar qual das tábuas testadas tem o percentual estimado mais próximo do ocorrido.

$$\%\ \text{ocorrência}^{(i)} = \sum \frac{\text{n}^\circ\ \text{ocorrências}^{(i)}}{\text{n}^\circ\ \text{de vivos}}$$

$$\%\ \text{estimativa}^{(i)} = \sum \frac{\text{n}^\circ\ \text{estimativas}^{(i)}}{\text{n}^\circ\ \text{de vivos}}$$

Sendo:

(i): tipo de evento analisado (mortalidade geral, entrada em invalidez ou falecimento de inválido);

n° de vivos: número de vivos expostos de acordo com o tipo de evento analisado (vivos válidos - para testar mortalidade geral e entrada em invalidez e vivos inválidos - para testar mortalidade de inválidos);

n° de ocorrências: número de ocorrências observadas no período analisado, de acordo com o tipo de evento (i);

n° de estimativas: número de estimativas no período analisado de acordo com a tábua testada e com o tipo de evento (i).

1.2. Desvio Padrão (σ):

Medida de dispersão estatística que mede o grau de dispersão dos dados em torno de um valor médio. Quanto maior o resultado, mais dispersos estão os dados:

$$\sigma = \sqrt{(x - \overline{x})^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(O_x^{(i)} - E_x^{(i)})^2}$$

Sendo:

Ox = número de observações dentro do período analisado, na idade "x" de acordo com o tipo de evento (mortalidade geral, entrada em invalidez ou falecimento de inválido);

Ex = número de estimativas da tábua testada, dentro do período analisado, na idade "x" de acordo com o tipo de evento (mortalidade geral, entrada em invalidez ou falecimento de inválido).

1.3. Teste Normal Padrão (Teste Z).

A – Distribuição Binomial

$X \sim B\ (q, n)$

X (número de mortos ou inválidos) segue uma distribuição binomial de parâmetros "q" e "n", com média (μ) q.n e variância

(σ^2) n.q.p

Sendo: q = probabilidade de falecimento p = probabilidade de sobrevivência (1-q) n = número de vivos

$P \sim B(q/n, n/n)$ (1)

Dividindo-se a variável X (número de mortos ou inválidos) por n, teremos a variável P (proporção de mortos ou inválidos, X/n), que também segue uma distribuição binomial de parâmetros "q/n" e "n/n", com média (μ) q e variância (σ^2) (q.p)/n

(1) Regra geral de transformação de variância "σ^2"

$var[a*X] = a^2 * var[X]$

B - Distribuição Normal

$P \sim B(q, (q.p)/n)$ $\quad P \sim N(q, (q.p)/n)$

A variável P (q, (q.p)/n) pode ser aproximada através de uma distribuição normal (q, (q.p)/n).

Esta distribuição normal resultante, por sua vez, pode ser padronizada, ou seja, transformada para a distribuição normal padrão (escala Z).

A distribuição normal padrão é uma distribuição normal com parâmetros 0 (μ) e 1 (σ^2). Portanto, cada valor da escala Z pode ser interpretado como o número de desvios padrões de dispersão a partir da média.

Fórmula para transformação da variável para "escala Z":

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

Sendo:

X = variável a ser padronizada;

μ = média;

σ = desvio padrão.

Substituindo pelas variáveis em questão, teremos:

$$Z_x = \frac{(P_x - q_x^T)}{\sqrt{\frac{q_x \cdot p_x}{n_x}}}$$

Sendo:

P_x = proporção de mortos ou inválidos na idade "x";

q_x^T = probabilidade de falecimento ou invalidez na idade "x" de acordo com a tábua "T";

$\frac{q_x \cdot p_x}{n_x}$ = variância (σ^2) na idade "x".

Assim, para cada idade "x" teremos um "Z_x" que representa a dispersão da probabilidade observada "P_x" em relação à probabilidade "q_x^T" da tábua "T" que está sendo testada.

Este valor "Z_x", por meio da variância utilizada no cálculo, é diretamente proporcional ao número de vivos "*n*", aumentando o resultado de "Z_x" à medida que o "*n*" aumenta.

Isso faz com que as diferenças ($P_x - q_x^T$) nas idades com poucos participantes tenham um peso menor, e conseqüentemente, que as idades com mais participantes tenham um peso maior.

A partir destes valores calculados podem ser realizados dois testes distintos, descritos nos itens C e D abaixo.

C – Teste-Z

c.1 – Somatório das distribuições normais padrão

Partindo de "n" variáveis normais ($X_1, X_2, X_3, ..., X_n$) igualmente distribuídas com parâmetros μ e σ^2, teremos que, de acordo com as propriedades da distribuição normal, a somatória destas variáveis terá distribuição normal, com parâmetros $n.\mu$ e $n.\sigma^2$:

$(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) \sim N(n.\mu, n.?2)$

Portanto, ao somarmos nossas variáveis Zx com distribuição normal (0,1) teremos uma nova variável SZ, que terá distribuição normal de parâmetros (n.0 = 0 , n.1 = n):

$(Z_1 + Z_2 + Z_3 + ... + Z_w) = SZ \sim N(0, n)$

c.2 – Aplicação do Teste-Z

Com base no valor da variável SZ, realizamos um Teste-Z, que de acordo com o nível de significância determinado (95%), determinará se a tábua testada é aceitável ou não:

$$Z_{calc} = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

Sendo:

X = SZ (somatório dos Z_x´s da tábua "T");

μ = 0;

σ = raiz quadrada de n.

D – Comparativo dos desvios absolutos

O Teste-Z apresentado acima apresenta um resultado conclusivo: para cada tábua analisada, ele determina se a mesma deve ser aceita ou não.

Neste teste comparativo, ao invés de buscarmos resultados individuais para cada tábua, visaremos um comparativo geral, buscando a melhor alternativa dentre todas as tábuas apresentadas.

Para isso, devemos fazer uma modificação nos Z_x´s calculados. Conforme mencionado anteriormente, os Z_x´s representam as dispersões em torno de uma média 0. Portanto, para valores menores que a média, o Z_x correspondente será sempre negativo, e para valores maiores que a média, o Z_x correspondente será sempre positivo. Ambos os casos representam desvios em relação à média, mas estes valores podem acabar se anulando quando somados. Portanto, como agora estamos medindo os desvios absolutos dos valores observados, temos que eliminar os valores negativos através da utilização dos módulos dos Z_x´s calculados, de modo que todos os desvios sejam considerados.

Ao somarmos estes valores, teremos uma medida absoluta da dispersão dos valores observados em cada uma das idades da tábua em questão, que chamaremos de DAT (Desvio Absoluto da Tábua "T"):

$DA^T = \sigma\ |Z_x|$

Por fim, podemos comparar os DAT´s de todas as tábuas testadas, com o objetivo de buscar o menor valor possível, que representará a tábua melhor ajustada à mortalidade ou à invalidez do grupo analisado.

ATUVERITA

Assessoria e Consultoria Atuarial

Curitiba – PR